CAPITOLO 4

La trasmissione dei segnali

4.1. Introduzione

Il segnale, come si è già detto, è una grandezza fisica variabile alla quale è associata una qualche forma di informazione. L'interpretazione di questa informazione, cioè del messaggio che il segnale trasporta è quindi normalmente lo scopo dello studio dei segnali.

Una delle più comuni situazioni in cui ci si può trovare quando si ha a che fare con i segnali è quella in cui il segnale è presente in un certo punto dello spazio e lo si vuole invece in un altro punto. Ad esempio se una stazione radio programma della musica, essa avrà la necessità di farla ascoltare al maggior numero di persone. Oppure se si vuole stampare il risultato di un programma al calcolatore è necessario che i dati raggiungano la stampante. Infine, persino nel caso in cui una sonda asculti il battito cardiaco di un paziente si pone il problema della trasmissione del segnale: infatti dalla sonda al macchinario (o al monitor sul quale il medico legge l'elettrocardiogramma) è necessario un sistema di trasmissione del segnale cardiaco.

La trasmissione di un segnale è quindi uno dei problemi base che bisogna affrontare quando si studiano i segnali. E' anche evidente che questo problema non può avere risposta univoca, dato che gli elementi che entrano in gioco nella trasmissione di un segnale sono molto differenti tra loro, a seconda del tipo di segnale, della distanza tra trasmettitore e ricevitore, delle caratteristiche vincolanti del progetto, e così via.

4.2. Generalita' sui Sistemi di Trasmissione

Uno schema molto generico di un sistema di trasmissione, a grandi linee comprende sempre i seguenti elementi base:

- un trasmettitore, che comprende tutti gli apparati del sistema di trasmissione;
- un mezzo trasmissivo, che rappresenta il mezzo fisico (con le sue caratteristiche) sul quale l'informazione, sotto forma di una grandezza fisica variabile, viaggia: ad esempio una tensione su un cavo od un'onda elettromagnetica nello spazio vuoto;
- un ricevitore, che comprende tutti gli apparati atti a ricevere il segnale ed ad estrarne la parte utile, cioè quella che trasporta il messaggio.

Il **trasmettitore** ha il compito di fornire potenza al segnale, in modo che questo abbia ancora una qualità sufficiente ad essere riconosciuto quando giunge al ricevitore. Il trasmettitore dunque comprende tutti gli apparati necessari a fornire potenza al segnale e, soprattutto, a renderlo compatibile con i tipi di segnale che possono viaggiare su quel mezzo trasmissivo.

Il **ricevitore** ha il compito di ricevere il segnale, cioè di prelevarlo dal mezzo trasmissivo e di estrarne la parte utile, cioè quella che trasporta l'informazione e di offrirla all'utente nella forma necessaria (ad esempio alle casse di un altoparlante se si tratta di musica).

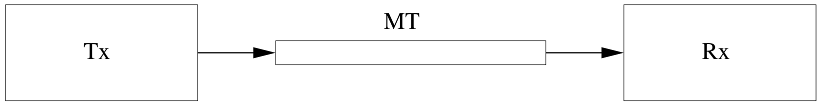

FIGURA 4.2.1. Schema a blocchi elementare di un sistema di trasmissione

Il **mezzo trasmissivo** ha il compito di convogliare l'informazione tra trasmettitore e ricevitore. A seconda delle sue caratteristiche si modella il tipo di segnale che deve viaggiare su di esso.

I mezzi trasmissivi si dividono in due grandi categorie a seconda del modo con cui trasportano i segnali:

- mezzi ad onde convogliate (o non dispersivi)
- mezzi ad onde irradiate (o dispersivi)

4.2.1. I mezzi trasmissivi. I mezzi ad onde irradiate sono sostanzialmente l'atmosfera o lo spazio vuoto. Tra i due tipi di mezzi non vi è grande differenza, dato che questo tipo di trasmissione prevede comunque l'irradiazione di onde elettromagnetiche. Tuttavia nel caso dell'atmosfera vi possono essere interazioni delle onde con i gas dell'atmosfera, con il vapor d'acqua o con la superficie terrestre (tali interazioni sono in genere molto complesse e non ci soffermeremo su di esse). La trasmissione per onde elettromagnetiche avviene quindi in modo radiativo, cioè al lato trasmettitore e al lato ricevitore vi sono due antenne che irradiano potenza sotto forma di onde elettromagnetiche. Queste si propagano con una legge che dipende dalla caratteristica radiativa dell'antenna trasmittente (oltre che ovviamente dal mezzo). Il caso più semplice che si considera è quello di antenne isotrope: la potenza del segnale si distribuisce in modo uguale in tutte le direzioni dello spazio. Quindi l'onda elettromagnetica viaggia continuamente sul fronte di una superficie sferica di raggio continuamente crescente. la sua velocità è pari alla velocità delle onde elettromagnetiche nel vuoto (c, detta anche velocità della luce ed uguale $2.99792458 \cdot 10^8\, m/s$). Ad una distanza R dall'antenna trasmittente la potenza per unità di superficie è:

$$P = \frac{P_T}{4\pi R^2} \tag{4.2.1}$$

Se quindi il ricevitore si trova a distanza R dal trasmettitore, basta moltiplicare questa potenza per l'area dell'antenna ricevente per ottenere la potenza in ricezione. In realtà nel conto precedente si deve considerare *l'area efficace*, dato che l'area fisica di un'antenna non corrisponde esattamente all'area che effettivamente si può sfruttare per trasmettere/ricevere le onde e.m. Se poi l'antenna trasmittente non è isotropa, essa ha un certo guadagno di direttività, cioè irradia prevalentemente più potenza in una direzione piuttosto che in altre. Naturalmente è compito del progettista fare in modo che la potenza irradiata venga fatta convogliare prevalentemente nella direzione in cui è posto il ricevitore. L'equazione diventa allora:

$$P_R = P_T \cdot \frac{G_T A_R}{4\pi R^2} \tag{4.2.2}$$

sfruttando la relazione che lega area efficace al guadagno d'antenna: $A_{eff} = G \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi}$ si ha:

$$P_R = P_T \cdot \frac{G_T G_R \lambda^2}{(4\pi)^2 R^2} \tag{4.2.3}$$

I mezzi ad onde convogliate sono sostanzialmente tutti i sistemi a cavo. Tra questi vi sono:

- doppino in rame
- cavo coassiale
- fibra ottica
- guide d'onda

I mezzi ad onde convogliate trasportano la potenza del segnale sotto forma di segnali di tensione (o corrente) che viaggiano sul mezzo seguendo leggi fisiche differenti a seconda del tipo di mezzo con cui abbiamo a che fare. Questi tipi di mezzo trasmissivo non possono essere studiati nello stesso modo dei circuiti a parametri concentrati, dato che le loro dimensioni fisiche sono in genere molto maggiori della lunghezza d'onda del segnale che convogliano. Per essi quindi si fa l'ipotesi di mezzo a costanti distribuite: cioè resistenza, induttanza e capacità sono distribuite uniformemente lungo la linea. Per l'analisi si suppone che, considerando un tratto infinitesimo di linea, dx, la sezione esaminata sia a parametri concentrati e si suppone inoltre che la linea sia uniforme, cioè che questi parametri non varino lungo la linea stessa.

A causa della presenza di elementi dissipativi all'interno di una linea di trasmissione, anche per i mezzi non dispersivi la potenza cala lungo il percorso del mezzo.

In particolare, se si suppongono costanti i parametri caratteristici del mezzo, la potenza decresce in modo lineare con la distanza in unità logaritmiche: $P_R = P_T/10^{\alpha_{tot}}$. Cioè la potenza ricevuta si può scrivere come potenza trasmessa meno l'attenuazione specifica per unità di distanza moltiplicato per la distanza, purchè le potenze vengano espresse in dB:

$$P_R = P_T - \alpha_s \cdot l \tag{4.2.4}$$

Per i conduttori in metallo (ad esempio il rame) l'attenuazione varia anche con la frequenza d'utilizzo (a causa dell'effetto pelle):

$$\alpha_s = \alpha_r \cdot \sqrt{\frac{f}{f_r}} \tag{4.2.5}$$

dove α_r è l'attenuazione ad una frequenza di riferimento f_r (le attenuazioni sono misurate in dB).

Nella tabella sono riportate le caratteristiche salienti dei più comuni mezzi trasmissivi

Mezzo	**Caratteristica**	**Variazione dell' attenuazione con la distanza**	**Banda d'utilizzo**
Vuoto	dispersivo	$1/R^2$	passa banda
Atmosfera	dispersivo	complessa $\sim 1/R^2$	passa banda
doppino,cavo coassiale	non dispersivo	esponenziale	passa basso
Fibra ottica	non dispersivo	esponenziale	passa banda

Nell'ultima colonna è stata anche riportata una delle caratteristiche fondamentali dei mezzi trasmissivi: cioè qual è la loro banda prevalente d'utilizzo, cioè la banda di frequenze dove essi esibiscono una minore attenuazione (per fare in modo da dover utilizzare meno potenza per lo stesso segnale). I mezzi dispersivi sono ovviamente passa banda (le onde elettromagnetiche hanno necessità di oscillare e quindi di avere frequenza non nulla per potersi propagare). I mezzi metallici sono prevalentemente passa basso a causa dell'effetto pelle visto precedentemente: infatti all'aumentare della frequenza essi esibiscono una attenuazione sempre maggiore (che cresce esponenzialmente). Infine le fibre ottiche sono così dette a causa del loro migliore comportamento (un'attenuazione specifica di circa $0.2\ dB$ per Km) alle frequenze ottiche (nell'ordine del migliaio di THz).

4.2.2. Equalizzazione dei mezzi trasmissivi. Dalla rapida analisi dei mezzi trasmissivi non è però emerso qual è lo scopo fondamentale di un mezzo trasmissivo: quello di convogliare l'informazione in modo da lasciarla immutata.

Dato in ingresso ad un mezzo trasmissivo ideale un segnale $s(t)$, al più ci aspettiamo che il segnale di uscita si sia attenuato (ed è inevitabile) e ritardato (a causa della velocità di propagazione finita). La forma del segnale di uscita è quindi

$$k \cdot s(t - t_o) \tag{4.2.6}$$

a cui corrisponde una funzione di trasferimento pari a:

$$H(f) = k \cdot e^{-j\omega t_o} \tag{4.2.7}$$

Il mezzo trasmissivo ideale ha quindi ampiezza costante dello spettro e fase che varia linearmente. Si può parlare di funzione di trasferimento del mezzo trasmissivo ideale perchè si suppone che esso sia lineare e che le sue caratteristiche non variano nel tempo (tempo-invariante).

I mezzi reali tuttavia si discostano molto dal comportamento ideale. Prima di tutto essi sono solo approssimatamente lineari (o lo sono solo per un determinato range di ampiezze del segnale), le loro caratteristiche variano nel tempo a causa di molte condizioni esterne (quindi sono lentamente tempo varianti), infine la loro funzione di trasferimento (ricavabile con le approssimazioni di linearità e tempo invarianza) non è quella del mezzo ideale.

La prima operazione che si effettua in ricezione è allora l'equalizzazione del mezzo trasmissivo. Detta $H_t(f)$ la funzione di trasferimento del mezzo (ricavabile con le approssimazioni viste), l'**equalizzazione** è un filtraggio effettuato per compensare l'effetto del mezzo trasmissivo:

$$H_{eq}(f) = \frac{k \cdot e^{-j\omega t_o}}{H_t(f)} \tag{4.2.8}$$

Naturalmente, affinchè si possa effettuare un'equalizzazione del mezzo è necessario che il mezzo trasmissivo sia lineare, tempo invariante (una lenta tempo varianza è ammessa, purchè in ricezione l'equalizzazione si possa adattare a questa tempo varianza) e che si conosca il comportamento in frequenza del mezzo, cioè la $H_t(f)$.

Se il mezzo è non lineare compaiono termini armonici "spuri", anche dove il segnale non ha componenti spettrali (distorsione non lineare). Le componenti spettrali spurie possono essere filtrate, sempre che esse siano all'esterno della banda del segnale, altrimenti non è più possibile distinguerle dal segnale stesso in uscita dal mezzo trasmissivo. Inoltre, poichè una non linearità si può sempre approssimare con uno sviluppo in serie di Taylor di ordine opportunamente elevato, può essere istruttivo vedere cosa accade quando un segnale passa attraverso un semplice quadratore, la più semplice delle non linearità. Questo dispositivo non lineare effettua il quadrato del segnale che gli proviene all'ingresso: $Y = X^2$. Ad un prodotto nei tempi corrisponde una convoluzione nelle frequenze: $Y(f) = X(f) * X(f)$, con conseguente raddoppio della banda del segnale e mescolamento delle componenti armoniche.

Si ricordi infine che un mezzo trasmissivo reale introduce sempre una qualche forma di disturbo sul segnale immesso. In ricezione dunque, oltre al segnale (distorto o modificato dal mezzo) saranno sempre presenti una serie di segnali indesiderati, legati in modo più o meno complesso all'informazione. A tali tipi di disturbo si dà il nome generico di **rumore**.

4.3. Trasmissione Analogica e Numerica

Una prima grande distinzione tra i sistemi di trasmissione si ha a seconda del segnale che si vuole trasmettere: se il segnale è analogico o se il segnale è numerico.

La trasmissione numerica è da anni diventata più popolare e conveniente della trasmisione analogica per più motivi. Il motivo fondamentale sta nel fatto che nella trasmissione numerica la struttura del trasmettitore/ricevitore non cambia al variare del segnale che si codifica o della sequenza di simboli che si devono trasmettere; al contrario nella trasmissione analogica il sistema varia a seconda delle caratteristiche del segnale. Inoltre nella trasmissione numerica si riesce a controllare con maggior precisione l'entità dei disturbi che inevitabilmente influenzano il segnale durante la trasmissione. La trasmissione numerica inoltre permette un risparmio di potenza a parità di informazione convogliata o, equivalentemente, una maggiore informazione a parità di potenza in trasmissione. La trasmissione numerica, rispetto all'analogica, tuttavia, richiede uno schema di trasmissione/ricezione più complesso; si tenga conto però che gli schemi di trasmissione numerica sono standardizzati ormai da anni e in commercio esistono apparati economici per le più svariate esigenze e soluzioni.

Dalla rapida analisi dei mezzi di trasmissione fatta precedentemente è emersa una caratteristica importante: *i mezzi di trasmissione sono intrinsecamente analogici*: cioè non è possibile trasmettere su di essi dei segnali di tipo discreto, nè tanto meno numeri. Allora che cosa significa fare la distinzione tra trasmissione analogica e trasmissione numerica ?

Nella trasmissione analogica l'informazione che si trasmette è la forma del segnale stesso, così come questo è generato sul lato del trasmettitore (ad esempio un segnale musicale generato da uno strumento).

Nella trasmissione numerica invece si effettuano una serie di operazioni sul segnale sino a codificarlo in una serie di simboli. Una volta che sono stati ottenuti i simboli si effettua la trasmissione di forme d'onda analogiche (perchè altro non può essere), ma che, a differenza del caso precedente, *sono rappresentative dei simboli codificati e non della forma d'onda originaria*. Addirittura è possibile che il segnale analogico di partenza non esista affatto: si pensi al caso della trasmissione di dati da un computer ad una stampante, dove i simboli da trasmettere sono una sequenza di zeri e di uno.

Ritornando tuttavia al caso in cui si voglia trasmettere in modo numerico un segnale analogico, è necessario fare su di esso una serie di operazioni per renderlo numerico. Queste operazioni naturalmente devono avere la caratteristica di essere invertibili: cioè al lato del ricevitore deve essere possibile tornare indietro, in modo da avere a disposizione nuovamente il segnale originario o comunque qualcosa che gli assomigli abbastanza per l'utilizzo a cui è destinato.

Le tre operazioni che si effettuano al lato trasmittente per rendere numerico un segnale analogico sono, nell'ordine, il filtraggio, il campionamento e la quantizzazione. Cominciamo con l'analizzare il campionamento.

4.4. Il Campionamento

Dato un segnale analogico l'operazione di campionamento consiste nell'estrarre una serie di campioni, cioè i valori del segnale in posizioni equispaziate (anche se esistono casi di campionamento a passo non costante). Dall'operazione di campionamento si ha cioè una serie di numeri reali che rappresentano i campioni del segnale. In figura 4.4.1 è illustrata l'estrazione dei campioni dal segnale analogico $s(t)$.

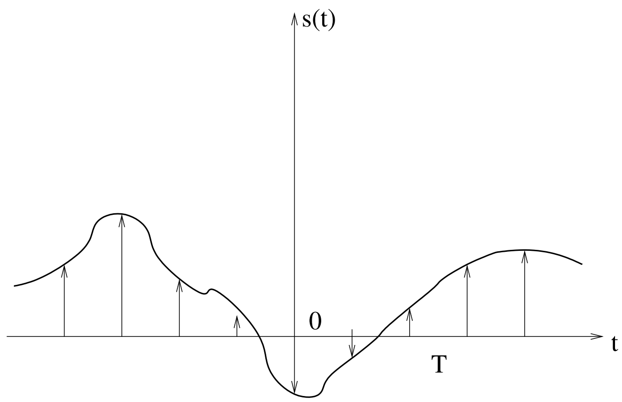

FIGURA 4.4.1. Campionamento di un segnale

Quando il campionamento avviene a passo regolare (e ciò accade nella stragrande maggioranza dei casi), il passo di campionamento T rappresenta l'intervallo con cui si spaziano i campioni, mentre è detta frequenza di campionamento il reciproco di T: $f_c = 1/T$. Intuitivamente si può già capire che aumentando il numero di campioni e quindi diminuendo il passo di campionamento, migliora la descrizione del segnale analogico. Al limite con $T \to 0$ avremmo una descrizione perfetta del segnale di partenza. In una situazione del genere naturalmente non saremmo però in grado di gestire i campioni del segnale, dato che, anche per un intervallo di tempo piccolo, avremmo un numero infinito di campioni. Si tratta allora di stabilire quale può essere il passo di campionamento più grande che si può utilizzare senza perdere informazione del segnale, per fare in modo, cioè, che esso possa essere ricostruito a partire dai suoi campioni.

Cominciamo allora a dare una descrizione matematica del campionamento. Una delle proprietà dell'impulso, come si è avuto modo di vedere, è quella di "estrarre" un campione del segnale, quando è applicato nella posizione di estrazione:

$$s(t)\,\delta(t-\tau) = s(\tau)\,\delta(t-\tau) \tag{4.4.1}$$

Infatti la relazione precedente, sebbene più corretta sotto il segno di integrale, ci dice che se moltiplichiamo un impulso in τ per il segnale $s(t)$, otteniamo un impulso di area $s(\tau)$ nella stessa posizione.

Dato allora un segnale $s(t)$, il segnale campionato a passo T, $s_c(t)$, ha la seguente rappresentazione:

$$s_c(t) = s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) \tag{4.4.2}$$

cioè una sequenza di impulsi equispaziati di area pari all'ampiezza del segnale nelle posizioni nT. Proviamo ad effettuare la trasformata di Fourier del segnale campionato.

$$S_c(f) = \Im\left\{s_c(t)\right\} = S(f) \star \Im\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)\right\} =$$

$$= S(f) \star \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f-\frac{k}{T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f-\frac{k}{T}) \tag{4.4.3}$$

Lo spettro del segnale campionato è la somma di tutte le repliche, a passo $1/T$, dello spettro del segnale di partenza; le repliche vanno da $-\infty$ a $+\infty$. Una rappresentazione dello spettro di un segnale campionato è riportata in figura 4.4.2.

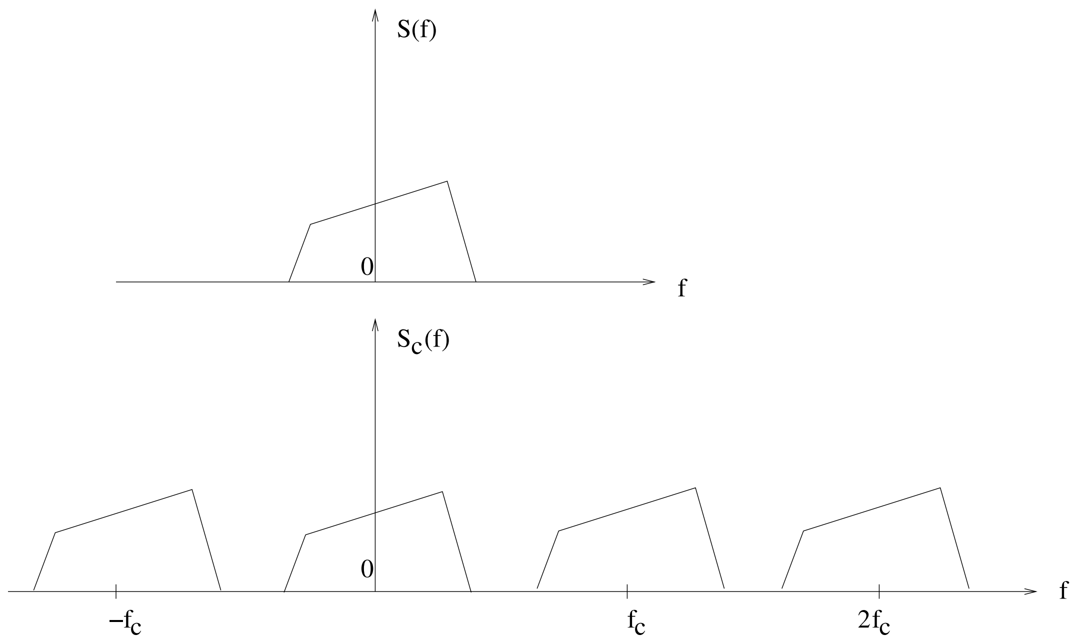

FIGURA 4.4.2. Spettro del segnale di partenza e della sua versione campionata

Da questa semplice osservazione si può immediatamente dedurre qual è la condizione sufficiente affinchè un segnale campionato possa essere ricostruito, cioè si possano ottenere dai campioni il segnale di partenza analogico. La condizione da verificare è che la banda unilatera del segnale sia inferiore a metà della frequenza di campionamento, oppure che la banda bilatera sia inferiore alla frequenza di campionamento:

$$\begin{gathered} 2B_s \leq f_c \\ B_t \leq f_c \end{gathered} \tag{4.4.4}$$

La metà della frequenza di campionamento è detta **frequenza di Nyquist**. Lo spettro di un segnale campionato esiste quindi solo all'interno dell'intervallo $[-f_c/2,\ f_c/2]$, poi si ripete periodicamente uguale a sè stesso. Se la condizione precedente non è verificata il segnale di partenza non può essere più ricostruito poichè le repliche spettrali si sovrappongono in modo tale da non poter essere più distinte tra loro. In tal caso si dice che il segnale è stato aliasato o che lo spettro del segnale campionato presenta **aliasing** (equivocazione). Si veda a tale proposito la figura 4.4.3.

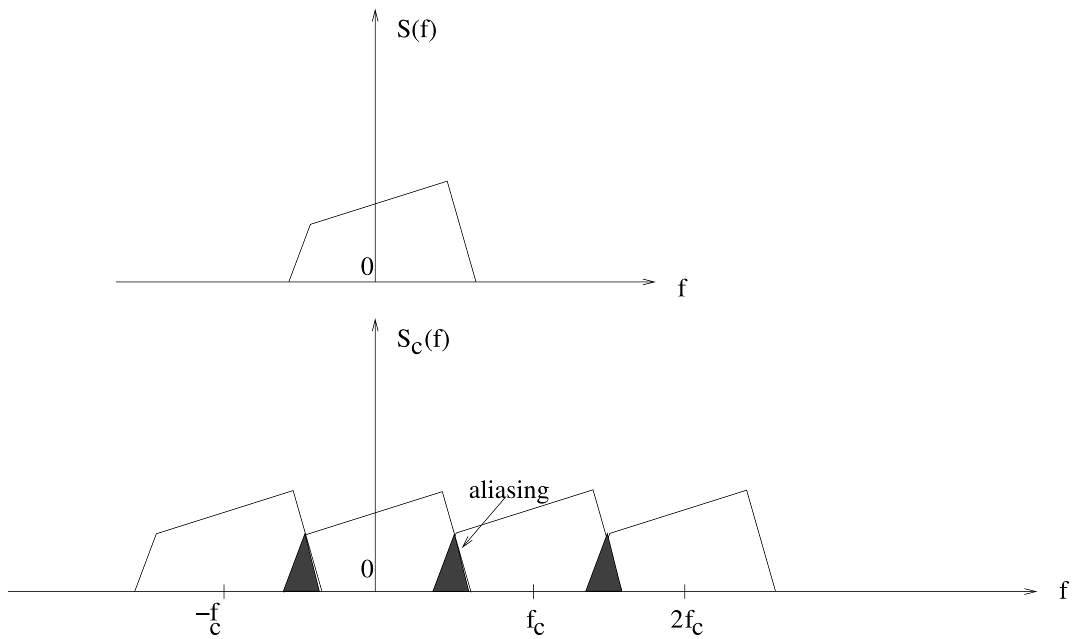

FIGURA 4.4.3. Spettro del segnale di partenza e della sua versione campionata in presenza di alias

Dato un segnale analogico si supponga di volerlo trasmettere in forma numerica. Il primo problema che ci dobbiamo porre è: a quale frequenza lo devo campionare ? E' infatti molto probabile che lo spettro del segnale non sia limitato come negli esempi. A rigore quindi la frequenza di campionamento dovrebbe essere infinita. In realtà, sulla base di considerazioni energetiche, si riesce comunque a stabilire una frequenza di campionamento.

Ad esempio il segnale vocale è compreso in una banda che va da circa $20\ Hz$ a circa $20\ KHz$. Quindi se si sceglie una frequenza di campionamento di, per esempio, $50\ KHz$, si è sicuri di non commettere equivocazione sullo spettro del segnale campionato.

Un modo per evitare sicuramente aliasing è quello di filtrare il segnale prima di campionarlo. Facendo passare il segnale attraverso un filtro passa basso di banda B, si è sicuri che tutte le frequenze al di là di B sono state abbattute. Successivamente il segnale può essere campionato ad una qualunque frequenza purchè questa sia $\geq 2B$.

Si supponga ora che il segnale numerico sia arrivato al ricevitore il quale si pone il problema di riottenere il segnale analogico dai campioni di partenza. A questa operazione è dato il nome di **ricostruzione** del segnale analogico. Se si osserva la figura, la cosa più ovvia è quella di filtrare via, dallo spettro del segnale campionato, tutte le repliche spettrali che non fanno parte dello spettro del segnale di partenza. A tale proposito, per manterere inalterato lo spettro del segnale di partenza, si usa il filtro passa basso ideale (cioè un rettangolo di ampiezza 1) di banda $f_c/2$ (vedi in figura 4.4.4).

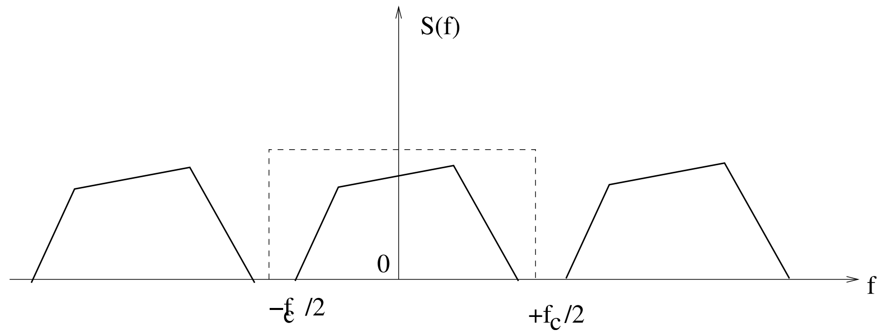

FIGURA 4.4.4. Ricostruzione del segnale analogico

Il filtro passa basso ideale permette di far "passare" in modo inalterato tutto ciò che sta tra $-f_c/2$ ed $f_c/2$, cioè nel periodo fondamentale, eliminando in modo perfetto tutto quello che sta al di fuori. Naturalmente il segnale analogico che si ricostruisce è quello che si ha a valle del filtro in trasmissione, dato che ciò che viene eliminato da quel filtro è definitivamente perso.

Il filtro ricostruttore ideale ha la seguente forma analitica:

$$H(f) = rect(\frac{f}{f_c}) \tag{4.4.5}$$

quindi la sua risposta all'impulso è quella di un seno cardinale:

$$h(t) = \frac{1}{T} sinc(\frac{t}{T}) \tag{4.4.6}$$

avendo posto $T = 1/f_c$. Proviamo allora a vedere analiticamente l'operazione di ricostruzione:

$$s_r(t) = s_c(t) \star h(t) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(\tau) \cdot \delta(\tau - nT) sinc(\frac{t-\tau}{T}) d\tau =$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT) \cdot sinc(\frac{t-nT}{T}) \tag{4.4.7}$$

L'operazione di ricostruzione si effettua quindi calcolando, nella posizione generica t, il valore che assume la somma dei prodotti che si ottengono moltiplicando i campioni del segnale per la funzione seno cardinale centrata in ciascuno dei campioni. Poichè inotre la funzione seno cardinale è pari, la formula precedente può anche essere scritta come:

$$s_r(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT) \cdot sinc(\frac{nT - t}{T})$$

il cui significato può anche essere inteso nel modo seguente: il segnale ricostruito nella posizione generica t si ottiene come somma dei prodotti tra i campioni e il valore che assume la funzione seno cardinale nelle posizioni di campionamento quando questa è posta in t. Entrambe le interpretazioni sono riassunte in figura 4.4.5.

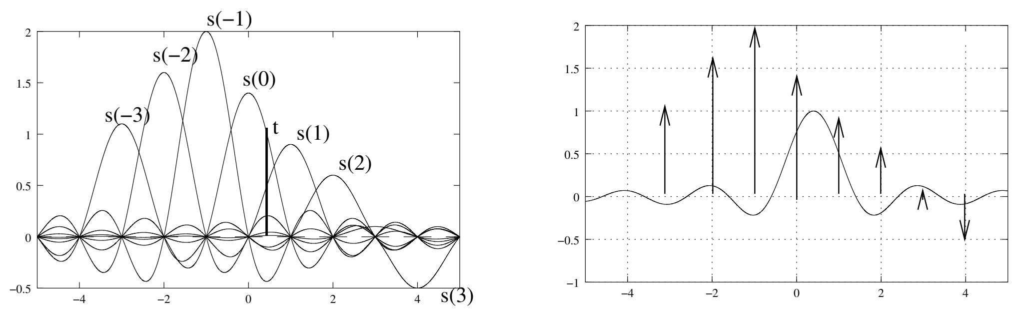

FIGURA 4.4.5. Rappresentazione grafica della ricostruzione del segnale analogico a partire dai suoi campioni

La casistica e le difficoltà nel campionamento di un segnale analogico non si esauriscono qui: infatti si è considerato solo il caso più semplice di segnale di partenza con banda concentrata dalla frequenza zero sino ad un certo valore massimo (segnale passa basso). Nel caso di segnali passa banda le cose sono leggermente differenti, anche se il teorema del campionamento continua a valere.

Infine si osservi che, a rigore, un campionamento perfetto è impossibile dato che dovrebbe esistere un sistema in grado di "estrarre" l'informazione del segnale in una posizione istantanea. La maggior parte dei campionatori funziona approssimando il comportamento sopra descritto: l'istante di campionamento diventa in realtà un periodo di osservazione del segnale, durante il quale si effettua una sorta di media del segnale stesso. Se questo periodo è molto più piccolo del periodo di campionamento si può ritenere corretta l'approssimazione di campionamento ideale. In figura 4.4.6 è mostrato un campionamento reale.

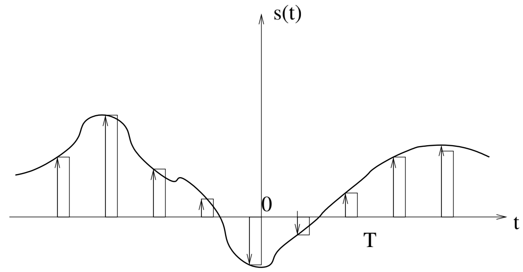

FIGURA 4.4.6. Campionamento reale

Un campionamento reale si può sempre schematizzare quindi come un campionamento ideale preceduto da un filtro la cui risposta all'impulso è il rettangolo alto 1 e di durata τ, con $\tau \ll T$. Poichè la trasformata di questo rettangolo è un sinc con il primo zero in $1/\tau$, l'effetto di un campionamento reale è quello di fare leggero un filtraggio passa basso del segnale prima di campionarlo.

4.5. La Quantizzazione

Dopo il campionamento si ha la serie di campioni del segnale. Questi altro non sono che numeri reali, e quindi come tali, non rappresentabili su calcolatore o in un sistema a logica digitale. L'operazione successiva al campionamento è la **quantizzazione**. La quantizzazione consiste nel trasformare un numero reale in un altro numero, scelto con un certo criterio, tra un certo insieme finito di valori. Poichè infatti l'aritmetica del calcolatore è finita, essa è in grado di descrivere solo numeri con una precisione finita. E' necessario allora trasformare il numero reale estratto dal campionatore in un numero a precisione finita, tra un certo insieme di valori possibili.

Da qui si capisce bene che la quantizzazione è un'operazione *irreversibile*: infatti una volta trasformato, il numero reale non può più essere ricostruito con precisione, dato che la sua informazione è perduta per sempre. Naturalmente la trasmissione numerica è possibile e funziona perchè la quantizzazione viene fatta con criterio. Cominciamo con l'analizzare quindi gli elementi della quantizzazione.

Il principio su cui si basa la quantizzazione è il seguente: se i campioni del segnale si quantizzano con un numero sufficiente di livelli (i possibili valori che il campione può assumere), allora l'effetto di perdita che si ha a causa dell'irreversibilità della quantizzazione è accettabile. Naturalmente si tratta di mettere in relazione questo effetto di perdita con il numero di livelli e con le caratteristiche del segnale se si vuole quantificare l'effetto distorsivo della quantizzazione.

La quantizzazione è caratterizzata dalla massima escursione dei campioni del segnale (o dinamica) e dal numero di livelli con i quali si vuole effettuare la quantizzazione stessa. Poichè la quantizzazione è legata sempre all'elaborazione del segnale all'interno di sistemi a logica binaria, è conveniente quantizzare con un numero di livelli pari ad una potenza del due: infatti in questo modo è possibile descrivere un campione come una sequenza di bit sempre della stessa lunghezza. Se ad esempio decidiamo di descrivere un campione con 8 bit, non ha senso utilizzare, ad esempio, solo 180 livelli per descrivere il segnale: sarebbe meglio utilizzarne il numero massimo consentito dal numero di bit utilizzato ($2^8 = 256$). In questo modo usiamo comunque 8 bit per descrivere i singoli campioni, e allo stesso tempo la descrizione del campione risulterà più precisa.

La cosa più logica da fare quando si effettua la descrizione del campione con i livelli, è quella di approssimarlo con il livello più vicino, in modo da minimizzare l'errore che inevitabilmente si commette nel quantizzare un segnale. In figura 4.5.1 è riportato lo schema generale della quantizzazione

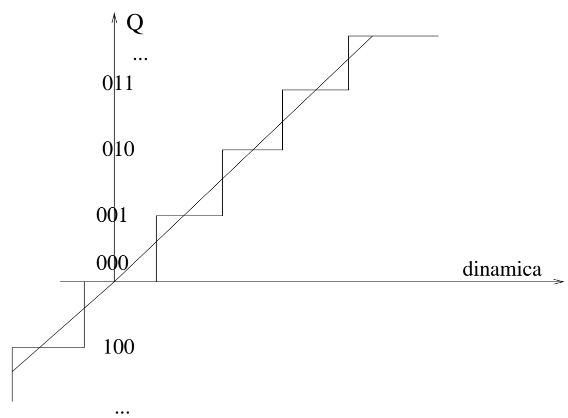

FIGURA 4.5.1. Schema della quantizzazione

I livelli sono codificati con una sequenza di bit scelta opportunamente. Ad esempio si può decidere di partire dal livello più basso numerandolo come livello 0 e di giungere a quello più alto che avrà valore $2^n - 1$. Quindi i bit assegnati ai singoli livelli altro non sono che la trasformazione binaria dei numeri assegnati ai livelli. Tale tipo di corrispondenza, almeno teoricamente, è puramente convenzionale, ma in realtà per motivi di convenienza si effettuano sempre e solo alcuni tipi di trasformazione, poichè questi permettono, in fase di ricezione, una più veloce ricostruzione del livello da assegnare al campione.

Anche la dinamica del segnale e la sua statistica ha la sua influenza sulla scelta del numero di livelli e sulla dimensione del salto. Infatti si supponga di avere a che fare con un segnale che per la maggior parte del tempo si mantiene a valori bassi e che saltuariamente presenta picchi elevati. Se si volesse quantizzare tale segnale, cercando di descrivere anche i picchi più alti, si perderebbe inevitabilmente parte della precisione nel descrivere il segnale quando questo presenta livelli bassi. Meglio in tale situazione rinunciare alla descrizione del segnale quando salta e descrivere con più precisione la dinamica che il segnale occupa per la maggior parte del tempo. I picchi saranno descritti con il livello massimo del segnale, e quindi una volta ricostruiti risulteranno "mozzati". Tale effetto è noto con il nome di **saturazione**.

Si supponga ora di avere a che fare con un processo aleatorio e stazionario, a media nulla. Il campionamento di una delle sue realizzazioni dà luogo, per ogni campione, ad una variabile aleatoria, la cui densità di probabilità sia $f(x)$. Si supponga inoltre che la dinamica della variabile aleatoria sia $[-a, a]$. Detto allora Q il numero di livelli, l'ampiezza del quanto o intervallino di quantizzazione è:

$$\Delta = \frac{2a}{Q} \tag{4.5.1}$$

I bordi degli intervallini si trovano in $x_i = -a + i \cdot \Delta$, $i = 0, ..., Q$, mentre i singoli livelli hanno valore:

$$x_q = \frac{x_i + x_{i-1}}{2} = -a + i \cdot \Delta - \frac{\Delta}{2} \qquad i = 1, ..., Q \tag{4.5.2}$$

In questo modo minimizzo l'errore di quantizzazione, dato che, ponendo il livello a metà tra due salti l'errore di quantizzazione massimo si commette se al più il campione ha un valore pari ad uno dei bordi. In questo caso estremo l'errore di quantizzazione è pari a metà livello: $\frac{\Delta}{2}$.

Per rendere quantitativo l'effetto "distorcitivo" della quantizzazione è possibile misurare l'errore quadratico medio che si commette nello scegliere i livelli di quantizzazione piuttosto che il valore dei campioni (l'errore medio ci si aspetta sia nullo, dato che c'è pari probabilità del campione di presentarsi poco più sopra o poco più sotto del livello):

$$N_q = E\left[(x - x_q)^2\right] = \int_{-a}^{+a} (x - x_q)^2 f(x) dx = \sum_{i=1}^{Q} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_q)^2 f(x) dx =$$

A questo punto la risoluzione dell'integrale si può effettuare solo se si conosce la statistica del processo. Una delle ipotesi semplificatrici che si fa molte volte è quella di supporre la statistica del segnale uniforme sulla dinamica considerata. Cioè si suppone $f(x)$ una v.a. uniforme nell'intervallo $[-a, a]$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & x \in [-a, a] \\ 0 & altrove \end{cases}$$

$$N_q = \sum_{i=1}^{Q} \int_{-a+(i-1)\Delta}^{-a+i\Delta} (x + a - i\Delta + \frac{\Delta}{2})^2 \frac{1}{2a} dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{Q} \int_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} y^2 \frac{1}{2a} dy = \frac{\Delta^2}{12} \tag{4.5.3}$$

Questa quantità va confrontata con la potenza del segnale, dato che, essendo un disturbo, esso è più o meno forte a seconda del livello di potenza che il segnale possiede (non ha senso chiedersi il livello di un disturbo se non lo si confronta con il livello del segnale disturbato):

$$S_x = \int_{-a}^{+a} x^2 \frac{1}{2a} dx = \frac{a^2}{3} \tag{4.5.4}$$

Poichè risulta: $a = \frac{Q\Delta}{2}$, allora $S_x = \frac{Q^2\Delta^2}{12}$. Il rapporto tra la potenza del segnale e il valore quadratico medio dell'errore di quantizzazione è detto **rapporto segnale rumore di quantizzazione** e vale:

$$\frac{S_x}{N_q} = Q^2 \tag{4.5.5}$$

é uguale quindi al quadrato del numero di intervalli. Questo conferma quanto già qualitativamente si era intuito: aumentando il numero di intervalli la descrizione dei campioni del segnale avviene sempre più precisamente. Se poi il numero di intervalli è una potenza del due il rapporto segnale rumore di quantizzazione vale: $\frac{S_x}{N_q} = 2^{2n}$, che espresso in dB è:

$$\left.\frac{S_x}{N_q}\right|_{dB} = 10\log_{10} 2^{2n} \simeq 6.02 \cdot n\ dB$$

Il rapporto segnale rumore aumenta in conclusione di circa $6dB$ per ogni bit di quantizzazione in più.

4.5.1. Quantizzazione non lineare. Per il calcolo del rapporto segnale rumore di quantizzazione si è supposto precedentemente che la statistica del processo sia uniforme nella dinamica in cui si suppongono presenti i campioni del segnale. Tuttavia questo normalmente non è vero. Si pone quindi il problema di trovare il rapporto segnale rumore nel caso generale, e, ancora prima, di verificare se il metodo di quantizzazione proposto è l'ottimale.

Si supponga di avere un processo a media nulla e con una densità di probabilità molto concentrata attorno all'origine, come potrebbe essere ad esempio un processo gaussiano con varianza molto piccola. In tal caso le singole realizzazioni del processo, pur potendo in linea teorica avere una dinamica molto elevata, nella maggior parte del tempo non si discosteranno in modo significativo dallo zero. Per le realizzazioni (e quindi per i campioni) di quel processo, è più probabile un valore piccolo che uno grande. Si tenga inoltre conto che, essendo il processo un processo gaussiano, la dinamica del segnale è infinita, il segnale cioè può avere una escursione anche estremamente grande, sebbene questo evento ha una probabilità molto remota di accadere.

Si tratta allora di trovare qual è la quantizzazione ottima per questo tipo di processo, dove l'ottimo sta nella massimizzazione del rapporto segnale rumore di quantizzazione.

Quando si quantizzano i campioni di questo processo necessariamente si dovrà scegliere una dinamica finita entro cui far variare il processo, pur essendo questo a dinamica teoricamente infinita. La descrizione che daremo del processo è una descrizione in qualche modo "mozzata": quando il campione assume cioè un valore che è maggiore del valore della dinamica scelta, esso viene posto pari al valore massimo. Questa descrizione è ragionevole, purchè questo evento sia molto remoto.

Per un processo gaussiano per esempio possiamo porre la dinamica pari a 3 volte la deviazione standard, dato che un processo con densità di probabilità gaussiana ha una probabilità di superare in escursione 3σ pari ad appena lo 0.03%. Scelta la dinamica si devono scegliere il numero di livelli. Questa normalmente è una scelta legata alle caratteristiche dell'hardware, ed è quindi limitata da altre considerazioni (il numero di bit del sistema che effettua la transizione analogico-digitale).

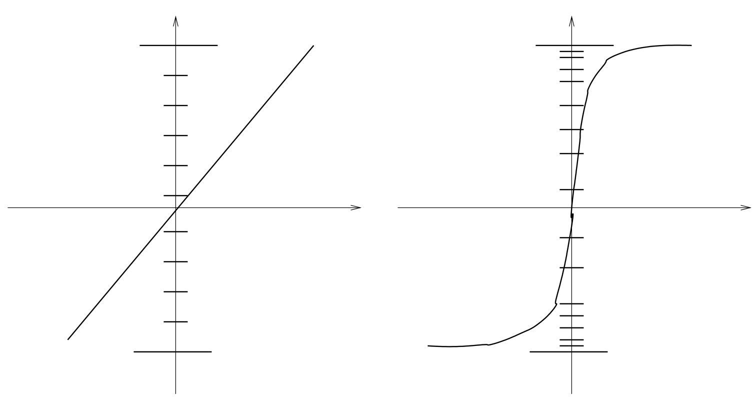

FIGURA 4.5.2. Confronto tra una quantizzazione lineare ed una non lineare

Infine si deve decidere come dividere la dinamica tra i vari livelli. Infatti finora si è implicitamente supposto che la dinamica sia divisa equamente tra i vari livelli, ma questa è solo una possibilità. Un'altra possibilità sta nel dividere i livelli in modo da assegnare *livelli più piccoli dove il segnale è più probabile*. In questo modo la descrizione dei campioni che più probabilmente occorrono è più precisa, mentre la descrizione dei campioni più rari perde di precisione. Complessivamente però questa quantizzazione, detta non lineare, risulta vantaggiosa e permette di migliorare il rapporto segnale rumore di quantizzazione.

Più precisamente la divisione tra livelli si fa in modo tale da suddividere l'escursione della dinamica in intervalli che contengano la stessa area della funzione densità di probabilità. Dove la densità di probabilità risulta elevata (evento più probabile) sarà necessaria una suddivisione più fine e quindi livelli più piccoli; al contrario dove la densità di probabilità è più bassa livelli più ampi (vedi in figura 4.5.3 l'esempio per una gaussiana).

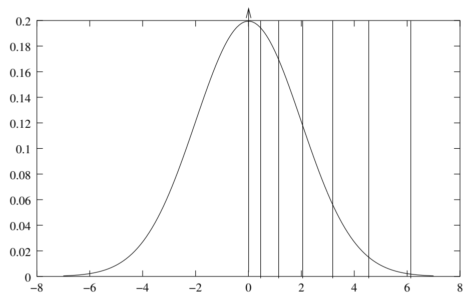

FIGURA 4.5.3. Quantizzazione non lineare di un processo gaussiano

4.6. Il Canale Binario

In un sistema di trasmissione numerico, i vari blocchi funzionali introdotti (filtraggio, campionamento, quantizzazione) servono a generare bit, che poi sono l'informazione che si trasmette. Generalizzando questo concetto potremmo dire che in un sistema di trasmissione numerico sono generati N differenti simboli, mentre al ricevitore ne giungono M (vedi figura 4.6.1).

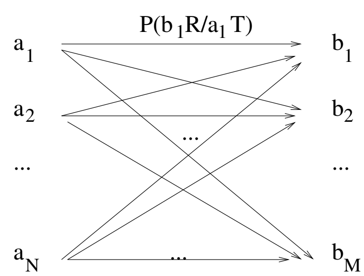

FIGURA 4.6.1. Schematizzazione della trasmissione numerica

Se il canale fosse senza errori, avremmo $N = M$ ed inoltre, alla trasmissione di a_i avremmo la ricezione con probabilità 1 di b_i: $P(b_i R/a_i T) = 1$ e $P(b_i R/a_j T) = 0$ se $j \neq i$. In un canale ideale l'alfabeto dei simboli in ingresso è uguale in numero a quello dei simboli in uscita, dato che il canale non introduce equivocazione e quindi non c'è possibilità di scambiare un simbolo per un altro o di dover introdurre altri simboli per indicare situazioni indecidibili (simboli di "cancellazione").

Se il numero di simboli trasmessi e ricevuti è pari a due, allora il sistema si semplifica e si ha il canale binario (figura 4.6.2). Nel canale binario ideale si suppone di avere due soli simboli in ingresso (che possono essere lo 0 e l'1) e due soli simboli in uscita.

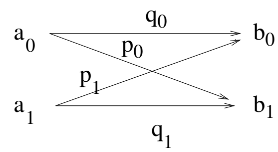

FIGURA 4.6.2. Canale binario ideale

Senza perdere di generalità si può supporre che $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, inoltre che $b_0 = 0$ e $b_1 = 1$. Le probabilità di trasmissione corretta o errata sono quindi:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_0 = P(0R/0T) \\ q_1 = P(1R/1T) \\ p_0 = P(1R/0T) \\ p_1 = P(0R/1T) \end{array} \right. \tag{4.6.1}$$

Le probabilità di errore, dette anche probabilità di transizione, si devono supporre genericamente differenti. Inoltre i simboli in trasmissione sono emessi con probabilità pari a: $P(0T) = P_0$ e $P(1T) = P_1$. Il canale si dice binario e **simmetrico** quando la probabilità d'errore è uguale, cioè non fa distizioni tra i simboli trasmessi: $p_0 = p_1 = p$. Poichè ogni simbolo trasmesso può essere ricevuto in uno di due modi possibili, si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_0 + p_0 = 1 \\ q_1 + p_1 = 1 \end{array} \right. \tag{4.6.2}$$

Per un canale binario la probabilità d'errore è la probabilità che, trasmesso un simbolo, il simbolo ricevuto sia differente:

$$P(E) = P(E \bigcap 0T) + P(E \bigcap 1T) = P(E/0T) \cdot P(0T) + P(E/1T) \cdot P(1T) =$$

$$= P(1R/0T) \cdot P(0T) + P(0R/1T) \cdot P(1T) = p_0 P_0 + p_1 P_1 \tag{4.6.3}$$

Se il canale è simmetrico si ha:

$$P(E) = p(P_0 + P_1) = p \tag{4.6.4}$$

Vediamo invece quali sono le probabilità di ricevere i due simboli:

(4.6.5) $$P(0R) = P(0R/0T) \cdot P(0T) + P(0R/1T) \cdot P(1T) = q_0 P_0 + p_1 P_1$$

(4.6.6) $$P(1R) = P(1R/0T) \cdot P(0T) + P(1R/1T) \cdot P(1T) = p_0 P_0 + q_1 P_1$$

L'errore sul canale binario può essere abbassato ricorrendo in trasmissione ad alcuni accorgimenti, che consistono generalmente nel modificare il bit trasmesso (o una sequenza di bit) in modo che questo risulti meno "equivocabile" con l'altro simbolo. A tale sistema si dà il nome generico di **codifica di sorgente**. Lo schema di un sistema di trasmissione numerico può quindi riassumersi nella figura 4.6.3, dove ad ogni blocco funzionale in trasmissione ne corrisponde uno in ricezione.

Per sorgente si suppone un qualche sistema che emetta bit, comunque questi siano stati generati (campionando e quantizzando un segnale analogico o da un generatore di dati binari come potrebbe essere la porta di un calcolatore). La codifica di sorgente è, come già detto, un qualche sistema che dato un certo numero di bit, decide quale sequenza di bit o quale simbolo trasmettere. Il suo scopo è di rendere minimo l'errore di trasmissione senza rendere troppo complessa l'implementazione. Infine la codifica di canale è l'insieme di sistemi che, presi i singoli simboli, ne associano la forma d'onda corrispondente da mandare nel mezzo trasmissivo. In ricezione si fanno le operazioni contrarie sino ad ottenere l'informazione trasmessa.

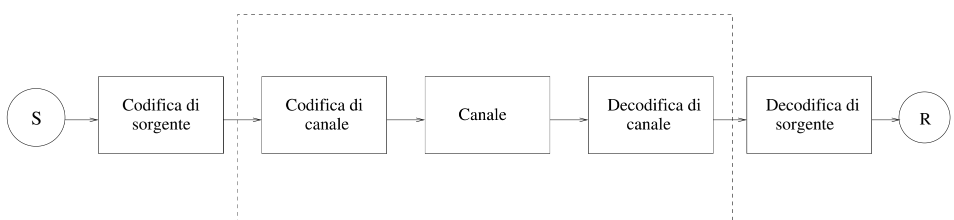

FIGURA 4.6.3. Schema a blocchi di una trasmissione numerica

In figura è stato quadrettata la parte che riguarda direttamente un canale binario: per un canale binario la complessità che sta dietro la trasmissione attraverso il mezzo trasmissivo è nascosta, dato che esso vede solo bit trasmessi e ricevuti.

4.6.1. Codice a ripetizione. Tra i vari metodi di codifica di sorgente vi è quello della codifica a ripetizione. Supponiamo di avere un canale binario simmetrico. Per ogni bit emesso dalla sorgente, nel canale sono trasmessi $2n + 1$ bit. La velocità di trasmissione è evidentemente ridotta di un fattore $2n + 1$, tuttavia anche l'errore è notevolmente minimizzato, dato che il ricevitore lavorerà a **maggioranza**: esso attende i $2n + 1$ bit e poi decide il simbolo in base a quello che in questa sequenza si presenta più spesso. la probabilità di sbagliare è la probabilità che nella sequenza siano stati sbagliati almeno $n + 1$ bit tra i $2n + 1$ trasmessi.

Esempio: sequenza da trasmettere: $0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1$, sequenza effettivamente trasmessa con $n = 1$: $000 \quad 111 \quad 111 \quad 000 \quad 111$.

La sequenza di bit in ricezione si può vedere come un processo di Bernoulli, dato che i simboli arrivano indipedentemente uno dall'altro e possono assumere solo due valori (0 e 1). In realtà una certa dipendenza statistica c'è, dato che $2n + 1$ bit dovrebbero avere lo stesso valore. Tuttavia la presenza del rumore sul canale rende del tutto casuale il valore che il bit assumerà in ricezione.

La probabilità di errore su un bit è allora la probabilità che siano stati sbagliati o $n + 1$ bit, oppure $n + 2$ bit, e così via sino a $2n + 1$:

$$P(E_1) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} p^k (1-p)^{2n+1-k} \tag{4.6.7}$$

4.6.2. Codice a controllo di parità. Nel codice a controllo di parità il codificatore di sorgente aspetta di ricevere $n - 1$ bit per trasmetterne n: esso cioè ne aggiunge solo uno in più, diminuendo la velocità di trasmissione di $n/(n - 1)$. La regola con cui tale bit è aggiunto è la seguente: se il numero di bit pari ad 1 nella sequenza lunga $n - 1$ è dispari, si aggiunge un 1, in modo da renderlo pari, altrimenti si aggiunge uno zero. Questa codifica è detta a **parità pari**, dato che assicura sempre un numero di 1 pari nella sequenza di n bit. L'alternativa consiste nell'avere un numero sempre dispari di 1 nella sequenza di n bit ed è chiamata **parità dispari**.

Ad esempio sia $n = 7$ e si abbia la sequenza: 0011010. Se vogliamo trasmettere a parità pari dovremo trasmettere la sequenza: 00110101. Supponiamo ora che durante la trasmissione sul mezzo l'errore sia avvenuto su un solo bit, ad esempio il terzo: 00010101. In ricezione ci si accorge dell'errore, dato che il ricevitore aspetta la sequenza di n bit per verificare se il numero di 1 è pari (per poi scartare l'ultimo bit che serve solo da controllo e non rappresenta informazione). Tuttavia questo sistema è un sistema di **rivelazione** e non **correzione** dell'errore, dato che, dopo la scoperta dell'errore il ricevitore non è in grado di stabilire quale tra i bit trasmessi è errato. A questo punto però ha varie alternative: richiesta di trasmissione, scartare la sequenza, e così via. L'errore inoltre si scopre solo perchè nella sequenza è stato sbagliato un solo bit (o in generale un numero dispari). Se i bit sbagliati fossero stati due (o in generale un numero pari) il ricevitore non è in grado di stabilire nemmeno che c'è un errore, nello stesso modo in cui nel codice a ripetizione se l'errore avviene su un numero sufficiente di bit il ricevitore equivoca il simbolo trasmesso.

Tuttavia il sistema di codifica a parità funziona molto bene dato che normalmente l'errore di trasmissione su singolo bit è molto minore di 1. Questo comporta che a fronte di un sistema di codifica molto semplice ed efficiente l'errore su più di un bit in una sequenza è un evento molto più remoto dell'errore sul singolo bit.

La probabilità che l'errore non sia rivelato dal ricevitore è la probabilità che il numero di errori sui singoli bit sia pari. Supponendo n pari si ha:

(4.6.8)
$$P(Er) = \sum_{k=1}^{n/2} \binom{n}{2k} p^{2k}(1-p)^{n-2k}$$

Se il numero di errori è dispari invece il ricevitore può chiedere la ritrasmissione. Questo evento ha probabilità di accadere pari a:

(4.6.9)
$$P(Rt) = \sum_{k=1}^{n/2} \binom{n}{2k-1} p^{2k-1}(1-p)^{n-2k+1}$$

Infine la probabilità che la trasmissione sia corretta è:

(4.6.10)
$$P(C) = (1-p)^n$$

Poichè possono risultare solo una di quste tre alternative, si ha: $P(Er) + P(Rt) + P(C) = 1$. Le politiche di decisione a questo punto possono essere varie: ad esempio il ricevitore può chiedere la ritrasmissione sino a che non riceve una sequenza corretta (o meglio una sequenza in cui esso non riesce a rivelare l'errore), oppure può richiedere la ritrasmissione solo per un numero di volte fissato e poi scartare la sequenza se questa è ancora corrotta, o non richiedere affatto la ritrasmissione.

Facciamo l'esempio in cui il ricevitore richiede continuamente la ritrasmissione, sino a che non rivela più errore. In tal caso l'errore totale può capitare se, in prima trasmissione il ricevitore non si accorge della sequenza corrotta, oppure se, accorgendosi della sequenza corrotta in prima trasmissione, richiede la trasmissione e non si accorge della sequenza corrotta in seconda trasmissione, o se le prime due trasmissioni sono corrotte in modo che il ricevitore se ne accorga e la terza è corrotta in modo che non se ne accorga e così via. Quindi l'errore è l'unione di tutti questi eventi, dato che questi possibili eventi sono tra loro disgiunti. La probabilità d'errore totale è quindi:

$$P(E) = P(Er) + P(Rt)P(Er) + P(Rt)^2P(Er) + ... =$$

$$= P(Er) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} P(Rt)^k = \frac{P(Er)}{1 - P(Rt)} \tag{4.6.11}$$

A questo punto anche il numero di ritrasmissioni che si possono richiedere è una variabile casuale. Infatti il numero di ritrasmissioni è zero se la sequenza è corretta o se il ricevitore non è in grado di accorgersi dell'errore, è uno se in prima trasmissione ci si accorge dell'errore ma in seconda trasmissione no (oppure non c'è affatto) e così via:

$$\begin{cases} P(n_R = 0) = P(Er) + P(C) = 1 - P(Rt) \\ P(n_R = 1) = P(Rt) \cdot (1 - P(Rt)) \\ P(n_R = 2) = P(Rt)^2 \cdot (1 - P(Rt)) \\ \vdots \\ P(n_R = k) = P(Rt)^k \cdot (1 - P(Rt)) \end{cases} \tag{4.6.12}$$

Il numero medio di ritrasmissioni è allora:

$$E[n_R] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(n_R = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(Rt)^k \cdot (1 - P(Rt)) =$$

$$= (1 - P(Rt)) \cdot P(Rt) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(Rt)^{k-1} = (1 - P(Rt)) \cdot P(Rt) \cdot \frac{1}{(1 - P(Rt))^2} =$$

$$= \frac{P(Rt)}{1 - P(Rt)} \tag{4.6.13}$$

Il numero totale di trasmissioni è anch'esso una variabile aleatoria, pari a: $n_T = n_R + 1$. Quindi il suo valor medio vale:

$$E[n_T] = E[n_R] + 1 = \frac{1}{1 - P(Rt)} \tag{4.6.14}$$

Il canale binario può essere soggetto a numerose varianti che rendono lo schema complesso quanto si vuole. Ad esempio è sempre possibile immaginare situazioni in cui la legge di ritrasmissione sia più semplice del caso teorico di infinite ritrasmissioni: per esempio si può chiedere di ritrasmettere solo un certo numero di volte e poi accettare ciò che arriva eventualmente alla trasmissione n-sima.

Inoltre anche l'ipotesi di simmetria del canale può cadere: si può sempre pensare ad un canale che tratta gli errori sull'uno diversamente da quelli sullo zero, attribuendo così una probabilità d'errore differente a seconda che si sbaglino gli uno o gli zero.

Infine un'altra situazione comune è quella in cui in ricezione si introduce un terzo simbolo, detto di cancellazione, che rappresenta l'indecidibilità tra i due simboli attesi. Lo schema del canale binario diventa allora quello proposto in figura 4.6.4.

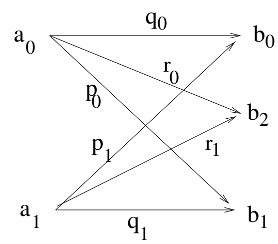

FIGURA 4.6.4. Canale binario con il simbolo di cancellazione in ricezione

In ricezione, se si trasmette il simbolo a_0 si può avere corretta ricezione (b_0), ricezione sbagliata (b_1) oppure un simbolo che non è nè corretto nè sbagliato ma che risulta indecidibile (b_2). In questa situazione il sistema non è in grado di decidere correttamente e quindi può adottare politiche del tipo: lo scarta comunque, oppure lo prende comunque, oppure lo scarta per il 50% delle volte, oppure lo prende pari al valore precedentemente arrivato e così via. La situazione simmetrica si ha trasmettendo l'altro simbolo (a_1).

4.7. Teoria dell'Informazione

Lo scopo della teoria dell'informazione è di valutare i limiti teorici dell'informazione che si può trasmettere su di un canale preassegnato sotto forma di trasmissione numerica. Dati infatti un insieme di sistemi reali differenti tra loro, un confronto per valutarne l'efficienza relativa è molte volte impossibile. L'unica via sta nel riuscire a determinare un limite teorico di "informazione" trasmissibile: in questo modo i sistemi reali si confrontano tutti con il sistema teorico. Questo problema fu posto (e brillantemente risolto) per la prima volta da Shannon nel 1948.

Si supponga di avere uno schema ideale di trasmissione numerica. Per schema ideale si suppone uno schema in cui i dettagli implementativi sono omessi ed inoltre la parte che converte i dati numerici in forme d'onda da trasmettere sul mezzo trasmissivo, in trasmissione e la parte che riceve le forme d'onda e decide quale tra i possibili simboli è stato trasmesso, in ricezione, è tutta racchiusa in una scatola che indicheremo come canale numerico o binario.

Si consideri dunque una sorgente discreta che emette continuamente, indipendentemente tra loro e a velocità costante, una serie di simboli scelti tra quelli di un possibile alfabeto. L'alfabeto sia composto da M simboli, per codificare i quali si ha necessità di $\log_2 M\, bit/simbolo$. Questo è dunque il rate di informazione trasmesso dalla sorgente. La legge con la quale si assegna ad ogni simbolo una determinata sequenza di bit è detta **codifica**. Se i simboli fossero equiprobabili è ragionevole supporre una codifica a lunghezza fissa. Se i simboli non sono più equiprobabili è più ragionevole utilizzare una codifica a lunghezza variabile, dato che è più conveniente utilizzare parole (stringhe di bit che codificano un simbolo) più corte per i simboli più probabili, in modo da minimizzare il numero di bit che per unità di tempo transitano sul canale binario.

Genericamente quindi la quantità di informazione media che transita sul canale si può ritenere pari ad una media pesata della lunghezza delle parole di bit, i pesi essendo le probabilità di presentarsi da parte dei simboli che quelle parole codificano (praticamente il numero medio di bit che transitano su canale):

$$\sum_i p(x_i) \cdot n_i \tag{4.7.1}$$

dove x_i è il simbolo i-simo, $p(x_i)$ la sua probabilità di occorrere e n_i il numero di bit per codificare quel simbolo.

L'informazione emessa dalla sorgente si può determinare utilizzando il cosiddetto **teorema dell'equipartizione**. Supponiamo la sorgente ergodica. Questo significa che è stazionaria e quindi che le sue proprietà statistiche non variano nel tempo ed inoltre che queste si possono desumere dall'osservazione di una sola realizzazione per tempi via via più lunghi (la sorgente passa per tutti i possibili stati). Questo ci consente allora di dire che un messaggio formato da N simboli, con N molto grande, conterrà mediamente Np_1 simboli x_1, Np_2 simboli x_2 e così via, sino ad Np_M simboli x_M. Per N tendente ad infinito la probabilità che tali simboli si presentino quel numero di volte è praticamente 1. Con questi N simboli si può effettuare la costruzione di tantissimi possibili messaggi: tutti quelli che hanno Np_1 simboli x_1, Np_2 simboli x_2 ,..., Np_M simboli x_M. Questi messaggi si differenziano tra loro per la posizione dei simboli all'interno del messaggio stesso. La probabilità di un singolo messaggio di presentarsi si può determinare basandosi sull'assunto che i simboli sono emessi tutti in modo indipendente:

$$p_{mess} = p_1^{Np_1} \cdot p_2^{Np_2} \cdot .... \cdot p_M^{Np_M} \tag{4.7.2}$$

Per la supposta ergodicità della sorgente tutti i messaggi leciti emessi dalla sorgente sono equiprobabili, quindi i possibili messaggi con N simboli sono: $1/p_{mess}$.

Il numero minimo di bit necessari per descrivere tutto il messaggio è, a questo punto:

$$n = \log_2 \frac{1}{p_{mess}} = -\log_2 p_{mess}$$

e quindi il numero medio di bit necessari per descrivere il singolo simbolo è:

$$H(x) = \frac{n}{N} = -\frac{1}{N}\log_2 \prod_{i=1}^{M} p_i^{Np_i} = -\sum_{i=1}^{M} p_i \cdot \log_2 p_i \tag{4.7.3}$$

A tale quantità si dà il nome di **entropia della sorgente** e si misura in $bit/simbolo$. Il suo nome, strettamente legato al concetto di entropia fisica (che è una misura dello stato termodinamico di un sistema fisico), dice qual è l'informazione media legata alla sorgente, cioè la parte non predicibile del messaggio.

La quantità $-\log_2 p_i$, confrontando la (4.7.1) con la (4.7.3), rappresenta *il minimo numero di bit teoricamente necessari per descrivere un simbolo*. L'informazione emessa da un simbolo si può allora definire come:

$$I(x_i) = -\log_2 p(x_i) \tag{4.7.4}$$

L'entropia rappresenta quindi il numero minimo di bit per simbolo mediamente necessari a descrivere un messaggio. Se descriviamo in questo modo l'informazione legata alla sorgente allora valgono le seguenti proprietà.

(1) Se $p(x_i) \to 1$ allora $I(x_i) \to 0$
Concettualmente, quanto più probabile è l'emissione di un simbolo, tanto meno informazione esso trasporta. Al limite, se esso è certo, la quantità di informazione trasportata è nulla.
(2) $I(x_i) > I(x_j)$ se $p(x_i) < p(x_j)$
(3) Se l'emissione di simboli successivi è indipendente, allora: $I(x_i \bigcap x_j) = I(x_i) + I(x_j)$. Infatti si ha: $P(x_i \bigcap x_j) = P(x_i) \cdot P(x_j) \Rightarrow I(x_i \bigcap x_j) = \log_2 \frac{1}{P(x_i \bigcap x_j)} = \log_2 \frac{1}{P(x_i) \cdot P(x_j)} = \log_2 \frac{1}{P(x_i)} + \log_2 \frac{1}{P(x_j)} = I(x_i) + I(x_j)$

In conclusione, se ci si vuole avvicinare ad una trasmissione numerica ottimale, si deve trasmettere codificando i simboli con parole a lunghezza variabile.

EXAMPLE 4.7.1. Si supponga che la sorgente possa emettere solo una coppia di simboli (come accade nel caso di sorgente binaria), x_1 e x_2, con probabilità di emissione rispettivamente p e $1-p$:

$$\begin{cases} x_1 & , p \\ x_2 & , 1-p \end{cases}$$

L'entropia in tal caso vale: $H(S) = p \cdot \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \cdot \log_2 \frac{1}{1-p}$. La funzione è rappresentata in figura 4.7.1. Come si vede il massimo dell'entropia, e cioè dell'informazione emessa dalla sorgente si ha quando i simboli sono equiprobabili.

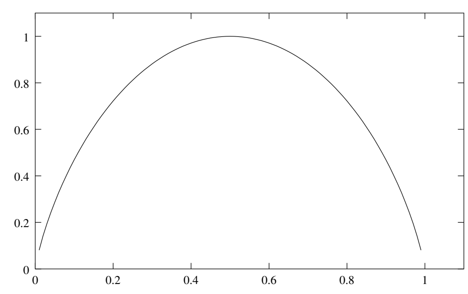

FIGURA 4.7.1. Entropia di una sorgente binaria

Dimostriamo adesso che: $H(s) \leq \log_2 M$, dove M è il numero totale di simboli dell'alfabeto. Cioè se si tenta di codificare i simboli nel modo più ovvio, si sprecano bit per simbolo, dato che c'è sempre una codifica migliore che permetterebbe maggior efficienza e quindi di avvicinarsi di più al limite teorico che è rappresentato da $H(s)$.

$$H(s) - \log_2 M \leq 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 \frac{1}{p_i} - \log_2 M \leq 0 \tag{4.7.5}$$

tuttavia si ha

$$\sum_{i=1}^{M} p_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 \frac{1}{p_i} - \sum_{i=1}^{M} p_i \cdot \log_2 M = \sum_{i=1}^{M} p_i \cdot (\log_2 \frac{1}{p_i} - \log_2 M) \leq 0$$

$$\sum_{i=1}^{M} p_i \cdot (\log_2 \frac{1}{Mp_i}) \leq 0$$

Si fa vedere facilmente che $\ln y \leq y - 1$. Applicando tale risultato alla disuguaglianza precedente si ha:

$$\sum_{i=1}^{M} p_i \cdot \left(\frac{1}{Mp_i} - 1 \right) \log_2 e = \log_2 e \cdot \sum_{i=1}^{M} \left(\frac{1}{M} - p_i \right) = 0$$

Quindi la disuguaglianza in (4.7.5) è dimostrata. L'uguaglianza vale solo nel caso in cui gli elementi emessi sono equiprobabili.

4.7.1. Codifica di Huffmann. Si è visto precedentemente che una codifica efficiente implica una codifica a lunghezza variabile. Al ricevitore, tuttavia, arrivano i bit in sequenza e quindi senza soluzione di continuità. In ricezione si pone allora un problema fondamentale: come fare a capire quando termina la sequenza di bit che codifica un simbolo e inizia la sequenza che codifica il simbolo successivo ? E' evidente infatti che, al contrario della codifica a lunghezza fissa, in questa situazione si deve essere in grado di comprendere la fine di un simbolo, altrimenti si rischia di equivocare l'interpretazione.

Facciamo il seguente esempio. La sorgente S emetta quattro simboli differenti x_1, x_2, x_3, x_4 (scritti in ordine dal più probabile al meno probabile) e i simboli siano codificati con le seguenti parole:

$$\begin{cases} x_1 & 0 \\ x_2 & 01 \\ x_3 & 010 \\ x_4 & 100 \end{cases}$$

Al ricevitore arrivi la seguente sequenza di bit: 100010010 che può essere interpretata in modo equivoco, dato che può essere: x_4, x_3, x_3, ma anche $x_4, x_1, x_4, ...$ oppure ancora $x_4, x_2, x_1, x_1, ...$. Situazioni del genere devono essere evitate.

THEOREM 4.7.2. *Siano M i simboli $x_1, x_2, ..., x_M$ e siano $n_1, n_2, ..., n_M$ le lunghezze delle parole di bit che codificano tali simboli. Condizione necessaria affinchè un codice sia univocamente decodificabile è che risulti vera la seguente disuguaglianza (disuguaglianza di Kraft):*

$$\sum_{i=1}^{M} 2^{-n_i} \leq 1 \tag{4.7.6}$$

E' evidente che tale disuguaglianza non può fornire una condizione sufficiente, dato che non dice come costruire il codice, nè qual è la lunghezza delle singole parole. L'unica cosa che può fare è di verificare a posteriori che un codice sia univocamente decodificabile. Codici con parole di lunghezza grande verificheranno facilmente la condizione di cui sopra. Ovviamente noi siamo tuttavia interessati a codici con parole di lunghezza quanto più piccola possibile e che siano ancora univocamente decodificabili.

In linea di principio potremmo costruire un codice con una lunghezza di parola pari a

$$n_i = \lceil -\log p_i \rceil \tag{4.7.7}$$

dato che non possiamo costruirlo di lunghezza $n_i = -\log p_i$ poichè non è una quantità intera. La relazione precedente ci dice anche che:

$$-\log p_i \leq n_i \leq -\log p_i + 1 \tag{4.7.8}$$

Sommando tutti i termini (per $i = 1, ..., M$) moltiplicati per la quantità positiva p_i si ha dunque:

$$-\sum_{i=1}^{M} p_i \log p_i \leq \sum_{i=1}^{M} p_i n_i \leq -\sum_{i=1}^{M} p_i \log p_i + \sum_{i=1}^{M} p_i$$

$$H(X) \leq \overline{n} \leq H(X) + 1 \tag{4.7.9}$$

La condizione nella Eq. (4.7.8) implica la disuguaglianza di Kraft, dato che:

$$I(x_i) \leq n_i \leq I(x_i) + 1 \Rightarrow$$

$$n_i \geq I(x_i) = \log_2 \frac{1}{p_i} \Rightarrow n_i \geq \log_2 \frac{1}{p_i} \Rightarrow p_i \geq 2^{-n_i}$$

che è proprio la (4.7.6) quando si estende la disuguaglianza a tutti i simboli ($i = 1, ..., M$).

La struttura base che si utilizza per produrre sequenze univocamente decodificabili è l'albero binario. Le codifiche prodotte con tale metodo sono dette di Huffmann.

EXAMPLE 4.7.3. Sia data una sorgente che emette simboli in modo indipendente, x_1, x_2, x_3, x_4 con probabilità rispettivamente di: $p_1 = 0.6$, $p_2 = 0.25$, $p_3 = 0.1$ e $p_4 = 0.05$. Costruiamo l'albero binario, procedendo dal simbolo meno probabile al più probabile (vedi figura 4.7.2).

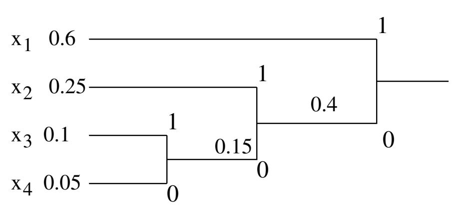

FIGURA 4.7.2. L'albero binario della codifica alla Huffmann

La codifica che ne risulta è:

$$\begin{cases} x_1 & 1 \\ x_2 & 01 \\ x_3 & 001 \\ x_4 & 000 \end{cases} \tag{4.7.10}$$

La tecnica consiste nell'accoppiare sempre le due probabilità più piccole. Per valutare l'efficienza del codice, basta confrontare la quantità media di informazione con l'entropia della sorgente:

$$H(s) = -0.6 \log_2 0.6 - 0.25 \log_2 0.25 - 0.1 \log_2 0.1 - 0.05 \log_2 0.05 = 1.49\, bit/simbolo$$

$$\overline{n} = 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.05 = 1.55\, bit/simbolo$$

Come si vede la codifica di Huffmann risulta molto efficiente poichè porta all'uso di un numero medio di bit per simbolo ragionevolmente vicino all'entropia. In una codifica tradizionale (con $2\, bit/simbolo$) si sarebbe ottenuto $\overline{n} = 2\, bit/simbolo$.

Vediamo ora l'esempio notevole dalla trasmissione fax.

EXAMPLE 4.7.4. Nella trasmissione fax la sorgente emette due simboli, il nero (N) e il bianco (B). La probabilità di emissione del bianco è enormemente più grande di quella del nero. Per semplicità si supponga che le probabilità di emissione siano: $p_N = 0.1$ e $p_B = 0.9$. Si suppone inoltre che l'emissione dei simboli sia indipendente, cosa nella realtà non vera e che viene anzi sfruttata per migliorare ulteriormente la codifica. Se codificassimo con un bit per simbolo, avremmo che la quantità di informazione media varrebbe: $\overline{n} = 1\, bit/simbolo$, molto lontana dal limite teorico, dato dall'entropia:

$$H(s) = -0.9 \log_2 0.9 - 0.1 \log_2 0.1 = 0.47\, bit/simbolo$$

Sprechiamo quindi il 53% dell'informazione trasmessa. La situazione migliora un po' se si effettua una codifica a coppie. Siccome si è supposto che i simboli sono emessi in modo indipendente l'uno dall'altro (cosa, ripetiamo, non vera nella realtà), si ha che la probabilità di emissione delle quattro possibili coppie vale:

$$\left\{ \begin{array}{ll} BB & 0.81 \\ BN & 0.09 \\ NB & 0.09 \\ NN & 0.01 \end{array} \right. \tag{4.7.11}$$

e codificando con l'albero binario (si veda in figura 4.7.3)

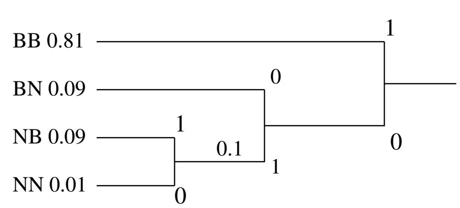

FIGURA 4.7.3. Codifica binaria per la trasmissione fax

La codifica che si ottiene è la seguente:

$$\left\{ \begin{array}{ll} BB & 1 \\ BN & 00 \\ NB & 011 \\ NN & 010 \end{array} \right. \tag{4.7.12}$$

Il numero medio di bit necessari per codificare una coppia vale: $\overline{n} = 1 \cdot 0.81 + 2 \cdot 0.09 + 3 \cdot 0.09 + 3 \cdot 0.01 = 1.29\, bit/coppia$ e quindi $0.645\, bit/simbolo$. Come si vede ci si è già avvicinati al valore teorico fornito dall'entropia. Si potrebbero anche considerare blocchi più lunghi, a patto che la complessità del sistema in ricezione lo permetta: infatti conviene non aumentare più la complessità quando l'incremento di efficienza diventa piccolo in confronto all'incremento di complessità circuitale.

Una codifica a lunghezza variabile può tuttavia creare qualche problema. Prima di tutto si suppone che la sorgente emetta i simboli a tasso costante. Se il codificatore di sorgente codifica ogni simbolo con un numero differente di bit, allora il numero di bit trasmessi per unità di tempo potrebbe essere variabile. A tale problema si pone rimedio con un blocco di memoria sufficientemente lungo sia in trasmissione che in ricezione: nel blocco di memoria in trasmissione si pongono una serie di simboli che sono codificati, in modo che la trasmissione avvenga sempre a bit rate costante. In ricezione i bit sono posti nel registro e quindi prelevati simbolo per simbolo. Quando i bit in ingresso tuttavia riempiono la memoria vi sarà overflow e andranno persi. Viceversa, se la memoria si svuota si ricorre al bit stuffing: si riempie la memoria con bit privi di informazione unicamente per mantenere occupato il canale.

Un altro problema sta nella più facile propagazione degli errori. Infatti in una codifica alla Huffmann l'errore su di un bit non fa equivocare soltanto il simbolo a cui è associato, ma anche il successivo (e forse anche oltre), dato che sbagliando un simbolo non si è più in grado di riconoscere l'inizio del successivo/i.

4.7.2. Codifica a blocchi. Nel caso della trasmissione fax si è visto che codificando i singoli bit si è molto lontani dal limite teorico imposto dall'entropia. Per far fronte a questo problema si è pensato di codificare insieme due simboli. In questo modo il limite dell'entropia si è avicinato un po' di più. Questo approccio di codifica può essere formalizzato. Quando infatti il numero medio di bit trasmessi, $\bar{n}$ è abbastanza lontano da $H(S)$ si può pensare di codificare insieme una coppia, una terna, ... oppure una ν-pla di simboli. In questo modo la sorgente S diventa, formalmente, la sorgente $Y = S \times S \times ... \times S = S^{\nu}$.

Se l'emissione dei simboli è indipendente, allora si dimostra che:

$$H(Y) = \nu \cdot H(S) \tag{4.7.13}$$

Dimostriamo che è vero per $\nu = 2$.

$$H(Y) = \sum_{i,j} p(s_i, s_j) \cdot \log_2 \frac{1}{p(s_i, s_j)} = \sum_i \sum_j p(s_i) p(s_j) \left[\log_2 \frac{1}{p(s_i)} + \log_2 \frac{1}{p(s_j)} \right] =$$

$$= \sum_i \sum_j p(s_i) p(s_j) \log_2 \frac{1}{p(s_i)} + \sum_i \sum_j p(s_i) p(s_j) \log_2 \frac{1}{p(s_j)} =$$

$$\sum_j p(s_j) \left[\sum_i p(s_i) \log_2 \frac{1}{p(s_i)} \right] + \sum_i p(s_i) \left[\sum_j p(s_j) \log_2 \frac{1}{p(s_j)} \right] =$$

$$= \sum_j p(s_j) \cdot H(S) + \sum_i p(s_i) \cdot H(S) = 2 \cdot H(S)$$

Inoltre, poichè risulta anche: $H(Y) \leq \bar{n_Y} \leq H(Y) + 1$, allora:

$$H(S) \leq \frac{\bar{n_Y}}{\nu} \leq H(S) + \frac{1}{\nu} \tag{4.7.14}$$

Se quindi $\bar{n_Y}$ è il numero medio di bit associati alla sorgente $Y = S^\nu$, $\bar{n_Y}/\nu$ è il numero medio di bit associati ai simboli della sorgente S. All'aumentare di ν questo numero medio tende più o meno velocemente al'entropia (vedi la convergenza della doppia disuguaglianza in 4.7.14).

4.7.3. Sorgenti discrete con memoria. Sinora si è supposto che i simboli emessi dalla sorgente siano tutti statisticamente indipendenti tra loro. Questa è un'approssimazione inaccettabile nella maggior parte dei casi e quindi vediamo se è possibile estendere i ragionamenti precedenti a sorgenti con memoria.

Nell'ipotesi di sorgente con memoria la definizione di entropia data precedentemente non è più sufficiente a descrivere l'informazione emessa dalla sorgente stessa, dato che il simbolo corrente, dipendendo dai precedenti, perde parte dell'informazione che trasporta poichè questa poteva essere desunta dai simboli precedenti. La statistica dipendenza costituisce informazione aggiuntiva di cui non si tiene conto nel calcolo dell'entropia come è stata definita sinora.

Data l'emissione di un simbolo s_1, la sua informazione è legata all'emissione del simbolo precedente s_0:

$$I(s_1/s_0) = \log_2 \frac{1}{p(s_1/s_0)} \tag{4.7.15}$$

L'informazione media, legata alla condizione che il simbolo precedente sia s_0 è:

$$H(S/s_0) = \sum_i p(s_i/s_0) \cdot \log_2 \frac{1}{p(s_i/s_0)} \tag{4.7.16}$$

L'informazione media, o anche entropia del primo ordine, è allora la media pesata di tutte le possibili emissioni del simbolo precedente, con pesi le probabilità che i simboli precedenti hanno di essere emessi:

(4.7.17)
$$H(S/s) = \sum_j \sum_i p(s_i/s_j) \cdot \log_2 \frac{1}{p(s_i/s_j)} \cdot p(s_j) = \sum_{i,j} p(s_i, s_j) \cdot \log_2 \frac{1}{p(s_i/s_j)}$$

L'entropia condizionata rappresenta l'ulteriore contenuto informativo che si ottiene dall'emissione del simbolo nuovo, tolta la conoscenza che il simbolo precedente è in grado di dare. A questo punto però si può supporre che la sorgente abbia una "memoria" più estesa, e quindi si passa a definire l'entropia del secondo ordine, del terzo e così via, sino a che la sorgente non esaurisce la sua memoria:

$$H(s_i/s_{i-1}, s_{i-2}, ..., s_{i-n}) =$$

(4.7.18)
$$= \sum_{s_i} \sum_{s_{i-1}} ... \sum_{s_{i-n}} p(s_i, s_{i-1}, s_{i-2}, ..., s_{i-n}) \cdot \log_2 \frac{1}{p(s_i/s_{i-1}, ..., s_{i-n})}$$

L'entropia vera di una sorgente è, in conclusione:

(4.7.19)
$$H(S) = \lim_{n \to \infty} H(s_n/s_{n-1}, s_{n-2}, ..., s_0)$$

Tenendo conto della statistica dipendenza tra i simboli si possono ottenere prestazioni notevolmente migliori. Ad esempio nella codifica fax è evidente una dipendenza statistica tra i simboli. Infatti la presenza di un evento 'nero' rende molto più probabile l'arrivo di un altro evento 'nero', dato che lo spessore della traccia di scrittura non è nullo. Questo discorso è ancora più valido per il 'bianco'. In conclusione sequenze anche molto lunghe di 1 o di 0 possono essere codificate con stringhe molto corte di bit, tanto più che alcune di esse sono anche molto probabili (ad esempio una sequenza di eventi 'bianco' che copre tutta la pagina è quella corrispondente a una riga tutta bianca, come ad esempio si trova al termine di un foglio).

Sfruttando quindi la conoscenza sui simboli precedenti si riesce a predire qualcosa sui simboli in arrivo e quindi l'entropia di ordine n ci si aspetta che sia minore di quella di ordine $n-1$. Dimostriamo che questo è vero per:

(4.7.20)
$$H(s_1/s_0) \leq H(s_1)$$

$$\sum_{s_1}\sum_{s_0} p(s_1, s_0) \cdot \log_2 \frac{1}{p(s_1/s_0)} - \sum_{s_1} p(s_1) \cdot \log_2 \frac{1}{p(s_1)} =$$

$$= \sum_{s_1}\sum_{s_0} p(s_1, s_0) \cdot \log_2 \frac{1}{p(s_1/s_0)} - \sum_{s_1}\sum_{s_0} p(s_1, s_0) \cdot \log_2 \frac{1}{p(s_1)} =$$

dove l'ultima uguaglianza discende dal fatto che: $p(s_1) = \sum_{s_0} p(s_1, s_0)$

$$= \sum_{s_1}\sum_{s_0} p(s_1, s_0) \cdot \log_2 \frac{p(s_1)}{p(s_1/s_0)} \leq \sum_{s_1}\sum_{s_0} p(s_1, s_0) \cdot \left[\frac{p(s_1)}{p(s_1/s_0)} - 1\right] \cdot \log_2 e =$$

(si ricordi infatti la disuguaglianza $\ln y \leq y - 1$)

$$= \sum_{s_1}\sum_{s_0} p(s_1/s_0)p(s_0) \cdot \frac{p(s_1) - p(s_1/s_0)}{p(s_1/s_0)} \cdot \log_2 e =$$

$$\left[\sum_{s_1}\sum_{s_0} p(s_0)p(s_1) - \sum_{s_1}\sum_{s_0} p(s_0)p(s_1/s_0)\right] \cdot \log_2 e = 0$$

da cui la tesi. Da ciò si deduce facilmente che:

$$0 \leq H(S) \leq H(s_n/s_{n-1}, ..., s_0) \leq H(s_n) \leq \log_2 M \tag{4.7.21}$$

4.7.4. Capacità del canale. Caratterizzata la sorgente rimane il problema di come caratterizzare il canale trasmissivo. Supponiamo di avere un canale binario ideale, cioè in grado di far passare bit al suo interno senza commettere errori. Detto allora $N(t)$ il numero di possibili messaggi leciti in grado di trasitare in un intervallo di tempo t, per codificarli sarà necessario utilizzare al minimo $\log_2 N(t)$. Facendo tendere il tempo di osservazione all'infinito si definisce capacità del canale la quantità:

$$C = \lim_{t\to\infty} \frac{\log_2 N(t)}{t} \tag{4.7.22}$$

misurata in bit/s. Nel caso di un canale reale i simboli in uscita da un mezzo trasmissivo sono in parte sbagliati. Consideriamo la sorgente e il canale binario reale come un'unica sorgente che emette un messaggio Y, generalmente diverso (a causa dei bit errati) dal messaggio X emesso dalla sorgente originaria (vedi figura 4.7.4).

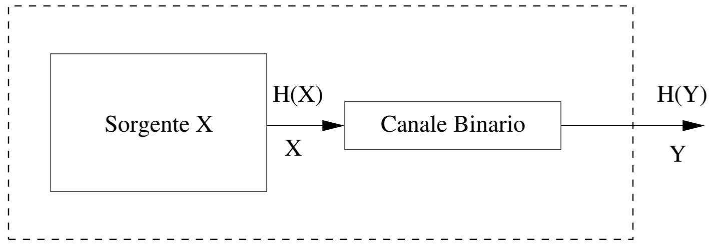

FIGURA 4.7.4. Schematizzazione di un canale binario reale

Considerata l'entropia della sorgente Y, $H(Y)$, se il canale fosse ideale, allora si avrebbe: $H(Y) = H(X)$. Nel caso di canale reale $H(Y)$ contiene anche informazione errata a causa della presenza di errori nei bit trasmessi. L'informazione in uscita dal canale non è quindi $H(Y)$, ma $H(Y)$ depurata di quella parte di informazione falsa che il canale introduce a causa degli errori. L'informazione vera che emerge dal canale è in conclusione:

$$I(X,Y) = H(Y) - H(Y/X) \tag{4.7.23}$$

dove $H(Y/X)$ è l'equivocazione, cioè quella parte di informazione dovuta alla non idealità del canale. Al variare della statistica della sorgente il canale può essere più o meno in grado di trasmettere informazione. A questo punto la capacità del canale può essere definita anche in base alla seguente:

$$C = \max_X I(X,Y) \tag{4.7.24}$$

dove il massimo è preso rispetto a tutte le possibili statistiche di emissione della sorgente.

In questo modo si mette meglio in evidenza che C rappresenta una misura dell'informazione vera che il canale è in grado di convogliare, poichè fa riferimento ai bit per unità di tempo che riescono a transitare correttamente sul canale.

Tra tutte le sorgenti con una data varianza, quella che permette di ottenere la massima capacità di canale a parità di statistica d'errore del canale stesso (che si suppone gaussiana) è la sorgente con densità di probabilità di emissione di simboli gaussiana. Supponendo la statistica della sorgente e quella del canale a media nulla, si dimostra che la capacità del canale (calcolata in $bit/simbolo$) in tali ipotesi vale:

$$C = \frac{1}{2} \cdot \log_2(1 + \frac{S}{N}) \tag{4.7.25}$$

essendo S ed N rispettivamente la potenza delle statistiche di sorgente e del rumore di canale. Questo teorema, noto anche come **teorema di Shannon**, permette di stabilire un limite superiore alla capacità di trasmettere bit su un canale, fissato che sia il rapporto tra la potenza del segnale emesso dalla sorgente e il rumore presente sul canale.